I/ Equation du 1° ordre à coefficients variables

1/ Définition :
Toute equation $\Psi(x ; y(x) ; y'(x)) = 0$ où $y : I \to \mathbb{R}$ est dite equation differentielle du 1° ordre

2/ Equation à variables séparées
a/ Définition :
Toute equation de la forme $f(y) \cdot y' = g(x)$
b/ Resolution :
$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$

3/ Equation homogène
a/ Définition :
Toute equation de la forme : $f\left(\frac{y}{x}\right) \cdot y' = k$, k constante
b/ Resolution :
On pose $u = \frac{y}{x}$ c'à'd $y = ux$ et $y' = u'x + u$
On se ramène à une équation à variable séparées

4/ Equations differentielle linéaire du 1° ordre
a/ Définition :
Toute equation de la forme : (E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ où a et b et c sont des fonctions continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$

b/ Resolution :
. l'equation : (E') : $a(x)y' + b(x)y = 0$ est appelé equation homogène associée à l'equation (E) (ou bien l'equation sans second membre)

. Theoreme : $y = y_1 + y_0$
Solutions de (E) = Solutions de (E') + Solution particulière de (E)

. Recherche d'une solution particulière de (E) : y_0
On utilise la methode de la "variation de la constante" dans l'expression de y_1 (solution de (E'))

c/ Equation de Bernoulli
c1 : Définition : Toute equation de la forme : $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$; $\alpha \neq 1$
c2 : Resolution : On pose $u = y^{1-\alpha}$ alors $u' = (1-\alpha)\,y'y^{-\alpha} = \frac{(1-\alpha)y'}{y^\alpha}$
on divise l'equation par y^α et se ramène à une equation linéaire 1° degré

d/ Equation de Riccati :
d1 : Définition : Toute equation de la forme : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$
d2 : Resolution : On la resoud si on connait une solution particulière y_0.
on pose $z = y - y_0$ et on la ramène à une equation de Bernoulli avec $\alpha = 2$
Ainsi on peut poser directement $y = y_0 + \frac{1}{z}$

ETUDUP .com

II/ Equation differentielle du 2° ordre à coefficients constants

1/ Définition: Toute equation de la forme : $(E) : ay'' + by' + cy = g(x)$

2/ Equation homogène associée à l'equation (E)

a/ **Définition:** c'est l'equation (E') sans second membre : $(E') : ay'' + by' + cy = 0$

b/ **Resolution de l'equation (E'):**

l'equation caracteristique de (E') est l'equation : $(e) : ar^2 + br + c = 0$

1°cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'equation (e) admet 2 racines reelles distincts r_1 et r_2 et les solutions de (E') sont les fonctions

$y_1 = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2°cas : Si $\Delta = 0$ alors l'equation (e) admet une seule racine r

et $y_1 = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ solutions de (E')

3°cas : Si $\Delta < 0$ alors l'equation (e) admet 2 racines complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$ et les solutions de (E') sont les fonctions $y_1 = e^{px}(\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$

c/ **Resolution de l'equation (E) :** $y = y_1 + y_0$

Theoreme : Solutions de (E) = solutions de (E') + Solution particulière de (E)

3/ Recherche d'une solution particulière de E : y_0

1°cas : Si g est un polynome de degré n alors il existe un polynome f de degré n telque :

* Si $b \neq 0$ alors $y_0 = f(x)$ solution de E
* Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $y_0 = x.f(x)$ solution de E
* Si $a = b = 0$ alors $y_0 = x^2 f(x)$ solution de E

2°cas : Si $g(x) = P(x).e^{\lambda x}$ où $d°P = n$ alors $\exists$ f polynôme ; $d°f = n$

* Si λ n'est pas racine de (e) alors $y_0 = f(x)e^{\lambda x}$
* Si λ est racine simple de (e) alors $y_0 = x f(x) e^{\lambda x}$
* Si λ est racine double de (e) alors $y_0 = x^2 f(x) e^{\lambda x}$

3°cas : Si $g(x) = \alpha \cos kx$ ou $g(x) = \alpha \sin kx$ alors $y_0 = \alpha_1 \cos kx + \beta_1 \sin kx$

Remarque: si $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ alors $y_0 = y_{01} + y_{02}$ avec y_{01} et y_{02} sont respectivement solutions particulieres de :

$ay'' + by' + cy = g_1(x)$ et $ay'' + by' + cy = g_2(x)$

ETUDUP .com

et encore plus..